dev : Borel - Cantelli.

leçons : 262, 266, 230, 121.
ref : Barbe Ledoux p93/111 + no ref.

lemme de Borel - Cantelli :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
1) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$.
2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$.

dem :
On se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements.

L 262, 266

1) Supposons $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

Par définition, $\{A_n \text{ i.s.}\} := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq k} A_m$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq k} A_m\right) \leq \sum_{m\geq k} \mathbb{P}(A_m) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par sous-additivité. car $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$

Ainsi $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0$ (car une proba ne peut pas être négative)

Toutes

2) Supposons $(A_n)_n$ indépendants et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.
Soit $0 \leq k < N$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\leq m\leq N} A_m\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\leq m\leq N} A_m^c\right) = 1 - \prod_{k\leq m\leq N} \underbrace{(1 - \mathbb{P}(A_m))}_{\leq \exp(-\mathbb{P}(A_m))}$$
par indep. car $1 - x \leq e^{-x}$ $\forall x \geq 0$ convexité de exp.

$$\geq 1 - \exp\Big(-\underbrace{\sum_{k\leq m\leq N} \mathbb{P}(A_m)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty}\Big)$$
car $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$.

En faisant $N \to +\infty$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\leq m} A_m\right) \geq 1$ $\forall k \geq 0$.

Donc comme $\left(\bigcup_{k\leq m} A_m\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion :

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{m\geq k} A_m\right) = 1.$$

leçons 262/266

lemme de Borel Cantelli pour les v.a.

Soient $(X_n)_n$ et X des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
i) Si $\forall \varepsilon > 0$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$ alors $X_n \longrightarrow X$ p.s.

ii) Si les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendants : $X_n \to 0$ p.s. $\Leftrightarrow \sum \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$.

dem :
Soient $(X_n)_n$ et X des v.a.r.
i) supp : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\underbrace{|X_n - X| \geq \varepsilon}_{:= A_{n,\varepsilon}}) < +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$.

Par la démo précédente, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq k} |X_m - X| \geq \varepsilon\right) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$

$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}} |X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$.

donc $X_n \to X$ p.s.

ii) Supposons $(X_n)_n$ indépendantes et mq : $X_n \to 0$ p.s. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$

$\Leftarrow$ Par BC, $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon \text{ i.s.}) = 0$ qui est équivalent à $X_n \to X$ p.s.

Par contraposée,
$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tq $\sum \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = +\infty$. Cf BL p110
Par le cas précédent, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\geq k} |X_m| \geq \varepsilon\right) = 1$ car les $\{|X_n| \geq \varepsilon\}$ sont indep par indep de $(X_n)_n$

donc $X_n \not\longrightarrow X$ p.s.

app: Il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ où $A_n = \{k \in \mathbb{Z} \mid n \mid k\}$.

~4'

dem:
On note $A_n := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On se place dans l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$
Supposons par l'absurde qu'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que
$\mathbb{P}(A_n) = 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $(p_k)_k$ la suite croissante des nombres premiers et $\mathcal{P}$ l'ensemble des nbr 1er.

* Mq les A_{p_k} sont indépendants :
Soit $J \subset \mathcal{P}$ fini. On a.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{p \in J} A_p\Big) \underset{\circledast}{=} \mathbb{P}\Big(A_{\prod_{p\in J} p}\Big) = \frac{1}{\prod_{p \in J} p} \quad \text{par hypothèse.}$$

$$= \prod_{p \in J} \frac{1}{p}$$

$$= \prod_{p \in J} \mathbb{P}(A_p) \quad \text{par hypothèse.}$$

donc les A_{p_k} sont indépendants.
$\circledast$ être multiple de tous les $p \in J$ (qui st 1er) $\Leftrightarrow$ ê mult de $\prod_{p\in J} p$

* $\sum \frac{1}{p_k}$ diverge.

Donc, par Borel Cantelli, $\mathbb{P}(A_{p_k} \text{ i.s}) = 1$, ce qui signifie que pour presque tout $n \geq 1$, il existe une infinité de nombres premiers le divisant : AB surde !
Tout nombre possède un nombre fini de diviseurs.

$\circledast$ $\mathbb{P}(A_{p_k} \text{ i.s.}) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq k} A_{p_m}}_{B}\Big)$. p.s. $n \in B$, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}, \exists m \geq k, \; p_k \mid n$
$\Leftrightarrow n$ a une infté de diviseurs premiers.

leçon 230, 121
~5'

prop : $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ diverge.

dem:
On pose : $R_k := \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ et $S_k := \sum_{i \geq 0} (R_k)^i$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \leq k \quad p_n \nmid m$.
Par décomposition en facteurs premiers, m s'écrit comme produit de r facteurs premiers (inconnue ; compté avec multiplicité)
et $\frac{1}{m}$ apparait dans $(R_k)^r$ et donc dans S_k.

. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$: $\forall n \leq k \quad p_n \nmid 1 + j \prod_{i=1}^{k} p_i$
donc,

$$S_k \geq \sum_{j \geq 1} \frac{1}{1 + j \prod_{i=1}^{k} p_i} \geq \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j \prod_{i=1}^{k+1} p_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k+1} p_i} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Donc $S_k = +\infty$.
Or S_k est une série géométrique de raison R_k, on en déduit donc $R_k \geq 1$
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{k \to +\infty} R_k \geq 1$ et $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$ ne peut donc pas converger.